867. Fandiño Pinilla M. I., D'Amore B. (2015). Una fórmula para medir objetivamente la dificultad de los estudiantes en la comprensión de un texto matemático. Uso con fines evaluativos didácticos. In: D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (Editors) (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*. Textos completos de las conferencias dictadas por lo conferencistas invitados al Congreso Internacional: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9-11 septiembre 2015. Pagg. 183-214. Chia (Colombia): Edicciones Universidad De La Sabana, 2015. ISBN: 978-958-12-0371-0. [Este articulo es un resumen de: D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students' understanding difficulties of a mathematical text. Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Gent, Belgium)].

Una fórmula para medir objetivamente la dificultad de los estudiantes en la comprensión de un texto matemático. Uso con fines evaluativos didácticos

Martha Isabel Fandiño Pinilla y Bruno D'Amore
Doctorado de investigación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia (Grupo MESCUD)
NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bolonia, Italia
bruno.damore@unibo.it

Investigadores participantes:
en Italia:
escuela primaria: Anna Angeli, Lorella Campolucci, Luigina Cottino, Erminia Dal Corso (con función de coordinación), Margherita Francini, Claudia Gualandi, Giuliana Liverani, Antonella Marconi, Annarita Monaco (con función de coordinación), Paola Nannicini, Laura Prosdocimi;
escuela secundaria: Gianni Callegarin, Irene Foresti, Maura Iori (con función de coordinación);
todos miembros del RSDDM (Grupo de Investigación y Experimentación en Didáctica y Divulgación de la Matemática) de Bolonia;

en Colombia:
escuela secundaria: Angélica Molano Zárate y Clara Cecilia Rivera Escobar.

Abstract. This article provides an objective formula for the empirical evaluation of the understanding of a mathematical text by students of any level of education. Of this formula we suggest an evaluative and educational use.

Resumen. Este artículo proporciona una fórmula objetiva para la evaluación empírica de la comprensión de un texto matemático por parte de los estudiantes de todos los niveles. De esta fórmula se sugiere un uso para la evaluación y un uso didáctico.

Keywords: readability formula, formula of understanding, comprehension difficulties of a mathematical text, read mathematics, writing mathematics (TEP)

Palabras clave: fórmula de legibilidad, fórmula de entendimiento, dificultad de comprensión de un texto matemático, leer la matemática, escribir de matemática (TEP).

1. Antecedentes teóricos y marco de referencia

En los años '80 fueron objeto de varios estudios los llamados "test de comprensibilidad" (haciendo referencia a los estudiantes, y que otros llaman "de legibilidad", haciendo referencia a los textos), los cuales habían surgido en los decenios precedentes, en particular para la matemática. Este tipo de estudios estuvo presente unos quince años y después se abandonó; pero la dificultad de los estudiantes para comprender textos de matemática aun hoy perdura… Más de un docente, sin importar el nivel escolar, desde primaria hasta universidad, nos asegura que leer y entender un texto de matemática es aún hoy una ardua empresa para el estudiante, en general.
Entre todos los test, tuvieron fortuna los llamados "test de clausura": se elige un escrito de matemática y se suprime una palabra cada n (la n-enésima, la $2n$-enésima, y así sucesivamente); el

estudiante es invitado a leer el escrito en el cual aparece un espacio en lugar de la palabra suprimida para después escribir en el puesto vacío la palabra que considere más oportuna para que el escrito que está leyendo adquiera sentido nuevamente.
Varias pruebas empíricas, particularmente en inglés y en francés, pero también en griego y en italiano, hicieron explícitas las elecciones a propósito de constantes y de variables que aparecieron en las llamadas fórmulas de legibilidad (veremos en futuro tanto algunos ejemplos clásicos como el propuesto por nosotros). Entre las investigaciones en esta dirección, señalamos a continuación sólo aquellas que nos proporcionaron el mayor número de instrumentos para la formulación de nuestro estudio, el cual mostraremos sucesivamente.
Las investigaciones de Vogel y Washburne (1928) son un referente clásico en la investigación sobre los test de legibilidad. Dicha investigación se refiere al objeto "escrito de matemática" (más o menos "fácil", desde un punto de vista objetivo) y el análisis se basa en varios factores, entre los cuales son predominantes la extensión del apartado y la tipología/dificultad ortográfica de las palabras suprimidas. En cambio, la investigación que aquí se presenta busca una fórmula para medir la calidad de la dificultad en la comprensión, independientemente de la extensión del texto o de la persona "estudiante que lee un escrito de matemática" (estudiante que tiene mayor o menor dificultad en la reconstrucción del escrito inicial de matemática).
Los estudios de Taylor (1953), Rankin (1970) y Henry (1973), si bien presentan diferencias relevantes entre sí, tienen numerosos aspectos en común: en todos estos estudios se sostiene la oportunidad y la validez de los test de clausura como instrumento de análisis y se presentan resultados interesantes gracias a investigaciones empíricas efectuadas en aula. Los análisis presentados por estos autores son tan decisivos que nos llevaron a optar por una fórmula que tuviera como base el test de clausura.
En el campo de la matemática, la primera investigación específica en esta campo es la de Kane, Byrne y Hater (1974). Este estudio, efectuado sobre escritos de matemática en inglés, no sólo propone resultados sobre la mayor o menor capacidad de comprensión de un escrito de matemática por estudiantes jóvenes, sino que también se analizan modalidades a través de las cuales se puede brindar una ayuda a los estudiantes con dificultad para comprender los escritos. Dicha investigación anticipa de alguna manera la nuestra, como veremos a continuación.
Entre las otras numerosas investigaciones, nos influenciaron particularmente las siguientes: Gagatsis (1980, 1982, 1984, 1985, 1995) y Gagatsis y Chaney (1983).
Tomemos en consideración la última investigación en términos cronológicos (Gagatsis, 1995) donde se analizan las diversas fórmulas y los diversos resultados encontrados en las investigaciones precedentes. Las fórmulas analizadas son todas del tipo:

$$\text{Legibilidad} = ax+by+cz+k$$

donde a, b, c, k son constantes numéricas asignadas a partir de pruebas empíricas, determinadas por diversos factores (entre estos, el más importante, el idioma), mientras que x, y, z son variables que representan elementos objetivamente medibles.
Las fórmulas elaboradas por Gagatsis tienen como base las fórmulas clásicas precedentes; por ejemplo, la fórmula de Rudolph Flesh (1951) para el idioma inglés es la de mayor difusión:

$$\text{Facilidad de lectura} = 206{,}835-0{,}846x-1{,}015y$$

donde x es el número medio de sílabas contenidas en 100 palabras y y es el número medio de palabras por frase.
Un famoso ejemplo en el cual se adapta el resultado precedente al idioma francés es el realizado de Kandel y Moles (1958):

$$\text{Facilidad de lectura} = 206{,}85-0{,}74x-1{,}015y;$$

mientras que una adaptación al griego la encontramos en Gagatsis (1982):

$$\text{Facilidad de lectura} = 206{,}85-0{,}59x-1{,}015\text{y}.$$

En Gagatsis (1995) se aplicó una fórmula del mismo tipo a un texto en idioma italiano para estudiantes de tercer grado de la escuela media (8° año de escolaridad) (el texto en cuestión se tomó de D'Amore, 1981).

Aplicando a este escrito, en italiano, las fórmulas de legibilidad heurísticamente establecidas respectivamente para el idioma francés y para el griego, se obtienen dos valores muy diversos entre sí, 19,05 y 52,55 con lo cual se demuestra que la fórmula es específica para un determinado idioma y para sus variables lexicográficas implícitas (Gagatsis, 1995). Nuestra fórmula, por el contrario, al estar centrada en la persona que lee el escrito, no está tan estrechamente vinculada con el idioma sino con la tipología de las palabras que deben ser colocadas en el puesto que le corresponde.
Sobre la base de esta experiencia, Gagatsis (1995) muestra cómo puede construirse empíricamente una fórmula de legibilidad, evidenciando como su funcionalidad necesita de un número mucho mayor de constantes y de variables pero quedando siempre en el campo de determinación de la mayor o menor dificultad de lectura del escrito, gracias a fórmulas de clausura (es decir de re-escritura de palabras después de la cancelación cada *n*) que ilustramos antes. Pero la necesidad de agregar más elementos hace casi inaplicable la fórmula para ser usada en el estudio de aspectos metodológicos didácticos, concretos y útiles para una situación de aula real (como lo pudimos verificar durante los estudios realizados en una tesis de maestría en Educación Matemática realizada por estudiantes de la Universidad de Medellín, tesis de la cual fuimos directores y sobre la cual regresaremos).

2. Dificultad de gestión del lenguaje matemático por parte de los estudiantes.

Las investigaciones en este campo evidencian con fuerza la muy conocida y generalizada dificultad de los estudiantes en la clase de matemática, en relación con la interacción entre el lenguaje matemático y lenguaje común, argumento estudiado por varios autores, por ejemplo Laborde (1982, 1990, 1995).
Esta estudiosa evidenció en más de una ocasión el siguiente hecho: el discurso matemático tiene un código semiológico propio que conlleva una economía de expresión que se realiza gracias a dos componentes esenciales, específicas para el lenguaje matemático: una función de designación y una de localización (Laborde, 1995). Este hecho implica un uso semántico unívoco, y en ocasiones nuevo, de los términos y de las modalidades expresivas del lenguaje natural que de alguna forma se vuelven específicos gracias a una reinterpretación en el discurso matemático.
Otra característica del discurso matemático es su universalidad (Laborde, 1995).
Además existe otro problema más, nos referimos al hecho que en el discurso matemático se mezcla el lenguaje natural con la (un más o menos difundido uso de la) escritura simbólica, hecho que en el discurso natural no se presenta. El estudiante y el docente adoptan tres tipos de estrategias para enfrentar las impresionantes diferencias entre los dos lenguajes:
1) la repetición, en el curso del texto, de la expresión que describe el objeto matemático (hecho que en el lenguaje natural debe, por lo general, ser evitado). Las repeticiones en los textos literarios son consideradas, en la mayor parte de los casos, negativas pero en un texto matemático son consideradas necesarias;
2) la referencia a características temporales que tienen un sentido en el lenguaje natural, pero no en el lenguaje matemático;
3) uso de propiedades de distinción, típicas del lenguaje natural pero no del lenguaje matemático, por ejemplo relativas a la dislocación espacial o a la magnitud o al tiempo (Laborde, 1995).
Estas consideraciones llevaron a Laborde a un análisis de las dificultades de lectura de los textos matemáticos, dado que en dichos textos el lenguaje natural y el lenguaje matemático se complementan y se intersecan.
Un detallado análisis de esta problemática se encuentra en D’Amore (1999, todo el cap. 8), mientras que los trabajos específicos sobre problemas de interpretación lingüística (tanto en la lectura en general como, particularmente, en la lectura e interpretación de los textos escritos de los problemas verbales matemáticos) se encuentran en D’Amore (1993a, 1993b, 2014). En dichos trabajos se evidencia el desarrollo del conflicto entre los dos lenguajes, como si fuesen antagónicos. Esto pasa

incluso cuando el docente propone situaciones adidácticas, es decir situaciones en las cuales debería ser el estudiante el protagonista de la construcción del propio saber, incluido el aprendizaje del lenguaje común en su versión idónea para su uso en el discurso matemático con sus especificidades (D'Amore, Sandri, 1994). (Para la terminología usada véase D'Amore, 1999).
Otros estudios de gran interés sobre la interferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje común se encuentran en los trabajos de Maier (1989b, 1996), que muestran diversas ocasiones de falta de comunicación por parte del estudiante, falta de comunicación que podría ser adscrita banalmente a ignorancia matemática pero que por el contrario se puede explicar mucho mejor haciendo referencia precisamente a estas interferencias.
Todos estos estudios concuerdan, a pesar de las diferencias que presentan entre ellos, en algunos puntos:
1) en todos se evidencia la dificultad de los estudiantes para dominar las característica del lenguaje matemático del aula (D'Amore, 1999);
2) en forma más o menos explícita y consciente, en estos estudios se estudia la sensación que advierte el estudiante (sin importar la edad) de tener que hacer uso, por motivos ligados al contrato didáctico, de una supuesta tipicidad de lo que él advierte como lenguaje matemático usado en el aula por el docente (y por los compañeros que tienen éxito) en la evaluación escolar; hasta crear un lenguaje específico casi siempre inoportuno, que irónicamente se le llamó "matematiqués" (en términos irónicos, así como se dice irónicamente "politiqués" el idioma de los políticos) (D'Amore, 1987).
Un reiterado análisis de estas dificultades, visto desde varios puntos de vista y recogiendo las instancias señaladas por los precedentes autores, se encuentra en D'Amore (1993b, 1996, 1997, 2000), D'Amore y Martini (1998) y en D'Amore y Sandri (1994, 1996).
Visto en general, el amplio discurso sobre las dificultades de interpretación y de gestión de un discurso que no sea rígidamente formal y matemático, sino de interrelación entre lenguaje natural y matemática escolar, deja sin resolver el problema de establecer una fórmula, lo más objetiva posible, para una evaluación cuantitativa – numérica de dicha dificultad o, mejor, de interpretación de un escrito en el curso de su lectura.

3. Hacia una fórmula objetiva de evaluación de la dificultad de interpretación de un texto de matemática.

Recientemente, propusimos a dos estudiantes de maestría en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Medellín[1] como objetivo de su tesis la aplicación de las fórmulas clásicas de legibilidad / facilidad para estudiar la comprensión de los textos de matemática en los cursos de 6° y 7° (edad de los alumnos: 11 a 13 años). Se observó que cada una de las fórmulas de legibilidad adoptada era demasiado artificial, complicada de gestionar, difícil de usar y de interpretar concretamente.
En particular, la interpretación estaba relacionada con el contenido del escrito y no con las dificultades que cada uno de los estudiantes encuentra (con la consecuente incertidumbre de cómo articular una intervención didáctica centrada en los estudiantes).
Nos encontramos con la necesidad de elaborar una fórmula válida para todos los niveles escolares, dando incluso aclaraciones bajo forma de definiciones, como las siguientes:
(1) qué significa decir, en este contexto, "texto de matemática";
(2) qué significa decir que un determinado texto es apropiado para un determinado grupo-clase de estudiantes;

[1] Se trata de las profesoras Angélica Molano Zárate y Clara Cecilia Rivera Escobar quienes, en el curso del 2013, sostuvieron la tesis en común con el título *El lenguaje narrativo como propuesta didáctica para aprovechar los obstáculos en la comprensión en contexto matemático* dentro de la Universidad de Medellín, bajo la dirección de Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla, consiguiendo el título de Maestría en Educación Matemática.

(3) qué significa la expresión: “entender” un apartado de un texto de matemática;
(4) qué variables determinan las diferencias entre los diversos tipos de textos de matemática.
Las que siguen son nuestras respuestas.
(1) En nuestra acepción, texto de matemática es un texto de carácter matemático o de contenido matemático, no necesariamente libro de texto escolar; puede ser un libro de lectura de carácter o con contenido considerado matemático.
(2) Un texto es considerado apropiado para una clase de grado *n* (ej. para el grado 5) si es considerado unánimemente tal por los autores que lo escribieron, por la editorial que lo publicó y por el docente que lo eligió y lo sugirió.
(3) Siguiendo la tradición de comprensión o de legibilidad de las fórmulas citadas en la primera sección, consideramos que el estudiante entiende un apartado de un texto de matemática, apropiado para la clase a la cual pertenece, si está en posibilidad de “cerrar” el apartado que presenta cancelaciones, es decir elegir con discreto éxito las palabras que se cancelaron en el apartado, escribiendo exactamente aquellas suprimidas o sinónimos aceptables según el juicio de un experto que controla el test o del docente de clase. En este punto surge inmediatamente un problema: ¿qué significa “un discreto éxito”? La fórmula que elaboramos, que propusimos, que experimentamos, que más de una vez modificamos sobre la base de pruebas heurísticas y que presentaremos dentro de poco, mide, según nuestro parecer la compresión del texto, en una escala numérica de mayor a menor comprensión del apartado en consideración, por parte de un determinado estudiante, a partir de un mínimo (ninguna de las palabras suprimidas fue reconocida y recolocada en el lugar que le correspondía) a un máximo (todas las palabras suprimidas fueron reconocidas y recolocadas en el lugar que les correspondía, exactamente esas palabras o sus sinónimos).
(4) Las variables que fueron elegidas para determinar las diferencias relacionadas con los diversos tipos de textos de matemática fueron las que se describieron en (1), pero también las siguientes: textos que acompañan los apartados escritos con figuras o sin ellas, textos que contienen fórmulas y sin estas (la fórmula puede haber sido expresada con una única letra o con un numeral o por un signo de operación, o por la integración de varios de estos signos).
En este escrito nos ocupamos de la medida, lo más objetiva posible, de la eventual falta de comprensión de un texto de matemática por parte de un estudiante. Pero no nos ocupamos de las *causas* de esta falta de comprensión. Estas pueden tener explicaciones profundas con bases en diversas teorías que aquí no exploramos. Se puede tratar de enfrentamiento entre culturas, falta de formación específica de carácter lexical, banal ignorancia matemática, incapacidad de coordinación semántica, inadecuadas informaciones a disposición, no comprensión de la tarea propuesta, presencia de obstáculos de carácter semiótico etcétera. Consideramos que en esta dirección se puede y se debe investigar, pero esto requiere como punto de partida una medida de la efectiva incomprensión de un texto escrito de matemática, no una genérica impresión por parte del docente. Es por esto que decidimos afrontar como primer problema dicha medida.

4. Decisiones tomadas sobre el escrito de proponer para estudiar la fórmula de comprensión, objetivo de la investigación, metodología adoptada.

Después de varios intentos, decidimos cancelar sólo palabras (incluidas las palabras técnicas o específicas) y no fórmulas; las fórmulas se dejaron inalteradas y no fueron contadas como palabras. Incluso símbolos aislados como letras, númerales, signos de operaciones etc. fueron considerados fórmulas.

Ejemplo de 3° primaria.
Uno de los apartados completos que fue elegido es el siguiente (Paciotti, Volpati, Meloni, 1978, pág. 185-186):
«Con las diez cifras que estudiaste en los años anteriores, podemos construir todos los números que queramos, indefinidamente. Según el puesto de las cifras, los números adquieren un valor diferente. Cada agrupamiento de diez

objetos forma una decena y se escribe 10. Si un número está compuesto por dos cifras, la cifra a la derecha representa las unidades (u), aquella a izquierda las decenas (d). 28= 2 decenas, 8 unidades.
Un grupo de 100 objetos, es decir cien unidades (100u), forma una centena y se escribe 100. En una centena hay siempre diez grupos de diez objetos, es decir diez decenas.
Si un número está compuesto por tres cifras, la cifra de la derecha representa las unidades, la cifra del medio las decenas y la cifra a la izquierda representa las centenas (c).
289= 2 centenas, 8 decenas, 9 unidades».

Sobre la base de nuestras elecciones, cancelamos las palabras de puesto 5, 10, 15 y así sucesivamente, contando sólo palabras, ni signos de puntuación ni letras que forman fórmulas, ni los numérales; en el puesto de las palabras suprimidas aparece un espacio en el cual el estudiante debe escribir la palabra que falta o un sinónimo, para "completar" o "cerrar" el texto dándole sentido: veamos el texto que se propuso a los estudiantes:

«Con las diez cifras ---- estudiaste en los años ----, podemos construir todos los ---- que queramos, indefinidamente. Según ---- puesto de las cifras, ---- números adquieren un valor ----. Cada agrupamiento de diez ---- forma una decena y ---- escribe 10. Si un número ---- compuesto por dos cifras, ---- cifra a la derecha ---- las unidades (u), aquella a ---- las decenas (d). 28= 2 decenas, 8 unidades.
---- grupo de 100 objetos, es ---- cien unidades (100u), forma una ---- y se escribe 100. En ---- centena hay siempre diez ---- de diez objetos, es ---- diez decenas.
Si un ---- está compuesto por tres ----, la cifra de la ---- representa las unidades, la ---- del medio las decenas ---- la cifra a la ---- representa las centenas (c).
289= 2 centenas, 8 ----, 9 unidades».

Las palabras suprimidas fueron entonces:

que, anteriores, números, el, los, diferente, objetos, se, está, la, representa, izquierda, Un, decir, centena, una, grupos, decir, número, cifras, derecha, cifra, y, izquierda, decenas.

Ejemplo de grado 13° (edad de los estudiantes: 18-19 años; en Italia, los grados escolares pre universitarios son 13).

Uno de los textos completos elegidos es el siguiente (Bagni, 1996, pág. 1314):

«Consideremos la función real f de variable real x expresada por $y=f(x)$ y el punto de abscisa $x=c$ perteneciente al dominio de esta. La evaluación directa de f en correspondencia de la abscisa $x=c$ describe, tradicionalmente, el comportamiento de la función dada en el punto de abscisa $x=c$.
El método tradicional para evaluar la función en el punto $x=c$ se resumen en la frase:
en la fórmula $y=f(x)$, sustituyendo a la variable x el valor $x=c$, obtenemos para la y el valor $f(c)$
y esto equivale a afirmar que:
en el punto de abscisa $x=c$, la función f asume el valor $f(c)$».
Pero es importante subrayar que con este procedimiento obtenemos una información relacionada exclusivamente con el comportamiento de la función f en cada punto de abscisa $x=c$: y no siempre esta información está en grado de colmar el conocimiento de la función en una más amplia "zona" indicada por la abscisa $x=c$».

Este es el texto con las palabras suprimidas:

«Consideremos la función real f ---- variable real x expresada ---- $y=f(x)$ y el punto de ---- $x=c$ perteneciente al dominio de ----. La evaluación directa de f ---- correspondencia de la abscisa $x=c$ ----, tradicionalmente, el comportamiento de ---- función dada en el ---- de abscisa $x=c$.
El tradicional ---- para evaluar la función ---- el punto $x=c$ se resumen ---- la frase:
en la ---- $y=f(x)$, sustituyendo a la variable x ---- valor $x=c$, obtenemos para la y ---- valor $f(c)$
y esto equivale ---- afirmar que:
en el ---- de abscisa $x=c$, la función f ---- el valor $f(c)$.
Pero es ---- subrayar que con este ---- obtenemos una información relacionada ---- con el comportamiento de la ---- f en cada punto de ---- $x=c$: y no siempre esta ---- está en grado de ---- el conocimiento de la ---- en una más amplia "----" indicada por la abscisa $x=c$».

Es obvio que la tipología de las palabras es muy variable; en el primer ejemplo aparecen términos técnicos de la matemática (números, cifras, diez, número, cien, unidades, centenas), palabras del idioma de carácter lógico o intrínsecamente descriptivo (si, un, por, que, según, y, izquierda), palabras del idioma natural (anteriores, valor, un, de, hay, representa); igual situación encontramos en el segundo ejemplo.

La inferencia que se deriva del estudio de la bibliografía y de las pruebas heurísticas (repetidas varias veces) lleva a concluir que la tipología de las palabras incide en la comprensión del texto. Se pueden identificar mejor las palabras de la lengua natural que las palabras de carácter lógico y términos técnicos de la matemática. Por tanto, en la evaluación de la dificultad de un estudiante en

la re-creación del apartado (tomado de un texto apropiado para él), la incidencia del error debe ser "pesada"; es decir, una cosa es no identificar la palabra "cifra", otra es no identificar la palabra "y", otra aún es no identificar la palabra "de".
El objetivo de esta investigación es entonces definible; y es el siguiente:
crear una fórmula del tipo "test de clausura", independiente del nivel escolar, que mida la dificultad que encuentra un estudiante para comprender un escrito tomado de un texto de matemática (apropiado para el nivel escolar en el cual se encuentra el estudiante en cuestión).
La prueba a la cual se somete el estudiante consiste en proponerle el texto que resulta después de haber cancelado las palabras según las reglas especificadas líneas arriba, invitándolo a escribir en los espacios dejados las palabras que él considere que faltan para dar sentido al escrito.
La investigación siguió una metodología de carácter empírico; se inició con una fórmula elegida entre aquellas que la bibliografía proporcionaba; se hicieron investigaciones preliminares para determinar la bondad de la fórmula, retocando los coeficientes, hasta obtener los coeficientes actuales. Según los resultados encontrados, sobre la base de la relación entre los valores de los índices establecidos y el valor de los índices de comprensión, cada vez se retocaban los índices, hasta reconocer como satisfactorios los actuales (que veremos líneas abajo).
Por ejemplo, sólo después de haber examinado varios apartados en diversos niveles escolares, se decidió no cancelar las fórmulas (entendidas, como lo dijimos anteriormente, en sentido amplio) y de cancelar sólo las palabras de la lengua común; esto porque nos dimos cuenta de que la cancelación de fórmulas era simultáneamente:
a) del todo casual según el apartado elegido;
b) demasiado significativa en algunos apartados y difíciles de reconstruir por un novicio.
De otra parte, nos parece interesante y sensato confrontar la dificultad de establecer relaciones entre el lenguaje natural y el lenguaje formal para poder evaluar la comprensión textual, más que las competencias matemáticas individuales [en el sentido ya expresado anteriormente, siguiendo las investigaciones de Laborde (1982, 1990, 1995), D'Amore (1987, 1993b, 1996, 1997) y Maier (1989a, b, 1993, 1996].
El mayor número de pruebas se realizó en Italia, gracias a la colaboración de varios docentes miembros del RSDDM (Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matemática)[2] de Bologna, en la escuela primaria (alumnos de 3°, 4° y 5° grados, 8-10 años), y en la escuela secundaria de I (alumnos de 11-13 años) y II grado (alumnos de 14-19 años).
En determinados días, los docentes presentaban a sus estudiantes y a estudiantes de otras clases el apartado al cual se le habían cancelado palabras, explicaban cual era la tarea y destinaban un tiempo extenso para la realización de la prueba.
Hicimos las pruebas con un total de 25 grupos - clases de escuela primaria, 4 grupos - clases de escuela secundaria de primer grado (2 en Italia y 2 en Colombia) y 10 grupos - clases de escuela secundaria de II grado, para un total de 39 clases; realizaron el texto 463 alumnos de primaria, 66 de secundaria de I grado y 127 estudiantes de secundaria de II grado, para un total de 656 alumnos (pero un gran número de estudiantes realizaron más de una prueba).

5. Nuestra propuesta de una fórmula de comprensión de un apartado de matemática por parte de estudiantes.

Sea T un apartado que contiene n palabras. No se consideran fórmulas ni signos de puntuación. El número de las palabras suprimidas es Ent(n/5) es decir la parte entera del número racional n/5.
De las palabras suprimidas hacen parte las siguientes categorías:
c_1) palabras de la lengua común no de carácter lógico ni técnico (número a);
c_2) palabras técnicas de la matemática (número b);

---

[2] Grupo de Investigación y Experimentación en Didáctica y Divulgación de la matemática.

c_3) palabras de la lengua de carácter lógico (conectivos: no, y, o, implica, …; cuantificadores: ninguno, algunos, todos, …; deductivos: dado, demuestra, entonces, …) (número c).
Por tanto: $a+b+c=\mathrm{Ent}(n/5)$.
Notemos que n, Ent(n/5), a, b, c son todos números naturales.
Sea:

$$m_T = a\times 0{,}1 + b\times 0{,}3 + c\times 0{,}4;$$

el número racional m se llama "índice de dificultad T".
Sean:
a' las palabras del tipo c_1 que el sujeto S reconoce correctamente ($a'\leq a$);
b' las palabras del tipo c_2 que el sujeto S reconoce correctamente ($b'\leq b$);
c' las palabras del tipo c_3 que el sujeto S reconoce correctamente ($c'\leq c$);
Se considera ahora la fórmula:

$$r_{TS} = (a\text{-}a')\times 0{,}1 + (b\text{-}b')\times 0{,}3 + (c\text{-}c')\times 0{,}4;$$

el número racional r_{TS} se llama "índice de comprensión de T por parte de S".
Si $r_{TS}=0$, se considera perfecta la comprensión del apartado T por parte de S.
Si $0\leq r_{TS}<m_T/2$ se considera la comprensión del apartado aceptable o positiva;
si $m_T/2\leq r_{TS}\leq m_T$ se considera la comprensión del apartado insuficiente o negativa.
Si se ingresa en Excel la fórmula y se insertan los números de errores, el valor de cada uno de los r_{TS} se da automáticamente y esto simplifica en gran medida los cálculos; la evaluación de los puntajes r_{TS} es inmediata.

6. Una nota específica sobre las pruebas efectuadas para asignar los valores empíricos precedentes.

Se efectuaron, gracias a la colaboración de los componentes del grupo de investigación y de otros docentes no pertenecientes a ninguno de estos grupos que prestaron su valiosa colaboración, varias pruebas empíricas con diversos valores, eligiendo diversas componentes variables que tienen un papel decididamente importante en esta situación:
(1) estudiantes catalogados como confiables por parte de los docentes,
(2) escritos de matemática objetivamente simples o, por el contrario, difíciles o muy difíciles,
(3) cancelando las fórmulas o parte de estas,
(4) proporcionando a un grupo un escrito que era considerado idóneo para la clase de nivel escolar precedente.
En fin, se consideraron y se analizaron un gran número de variables que nos permitió decidirnos por los valores 0,1 0,3, 0,4 que aparecen en la fórmula precedente (que modifican sensiblemente los valores que aparecen en las fórmulas empíricas clásicas).
Decidimos no reportar específicamente todas las pruebas realizadas junto con los resultados parciales obtenidos; pero estos se encuentran a disposición de los investigadores si los consideran útiles o interesantes para seguir los estudios. Muchas de nuestras pruebas se tabularon y por tanto son disponibles en hojas Excel.
Entre las pruebas empíricas que proporcionaron interesantes indicios acerca de valores oportunos de usar, se reveló particularmente útil aquella que llamamos "el texto facilitado" (ver precedente punto 4).
Supongamos que un estudiante S_q obtiene un puntaje r_{T1Sq} en la lectura de un apartado T_1 adecuado a su nivel escolar; y que obtenga un valor r_{T2Sq} en la lectura de un apartado T_2 idóneo a una clase de nivel escolar precedente a aquel al cual pertenece S_q; la fórmula tiene un sentido empírico aceptable si en general resulta $r_{T1St}>r_{T2St}$.
El estudio de los resultados de comprensión hechos sobre textos facilitados nos fue de gran ayuda en la determinación de los valores empíricos elegidos.

7. Resultados de la investigación.

Evidenciamos dos aspectos de considerar.

7.1. La fórmula expresa de forma objetiva la comprensión de un determinado escrito por parte de un estudiante; por tanto, puesta a prueba con varios estudiantes, proporciona un criterio empírico de la evaluación de la comprensión de un escrito en sí. Sobre la base de las elecciones hechas, dicha evaluación hace referencia a estudiantes que pertenecen al grado escolar para el cual el apartado se pensó, se escribió, se publicó y se eligió.

7.2. Una vez efectuada una prueba en aula sobre un determinado apartado T sobre *n* estudiantes S_1-…-S_n, se puede hacer una indagación sobre los *n* valores r_{TS} obtenidos y ver, por ejemplo, donde se posiciona el estudiante S_p ($1 \leq p \leq n$). Este posicionamiento indica el nivel de dificultad en el cual objetivamente S_p se encuentra, respecto a sus compañeros de clase.
Este tipo de análisis no forma parte de los trabajos precedentes citados en la bibliografía, pero fueron pedidos explícitamente por los colaboradores que participaron en la investigación.
Algunos colegas, precisamente, quedaron sorprendidos, haciendo y rehaciendo pruebas en sus respectivas clases, de la objetiva dificultad que manifiestan algunos estudiantes para proponer palabras que pudieran llenar los espacios vacíos para dar sentido al apartado considerado (ya que, para el docente, eso era de fácil interpretación). Algunos docentes señalaron la necesidad de idear actividades e instrumentos que permitieran la comprensión textual de apartados de matemática por parte de los estudiantes.
Transcribimos las palabras que una docente – investigadora nos hizo llegar por escrito:
«(…) de otra parte, ¿Cuándo les permitimos a los estudiantes leer un apartado por sí mismos? Nunca, siempre somos nosotros quienes lo explicamos, lo interpretamos por ellos. Incluso cuando damos el enunciado de un problema, lo explicamos, palabra por palabra. El alumno nunca debe interpretar un escrito, sólo debe escuchar nuestra interpretación. (…)»
Y concluye:
«Al hacer esta investigación entendí que debo arriesgar, proponer lecturas a mis estudiantes, incluso si se equivocan en su interpretación, deben aprender a entender por sí mismos el significado de lo que leen (…)».
Este tipo de reflexiones refuerza lo que también emergió en algunas investigaciones precedentes relacionadas con la capacidad de lectura y de comprensión de un escrito de matemática por parte de los estudiantes de cualquier edad (D'Amore, 1996). Dicha reflexión transforma una investigación empírica en una sugerencia didáctica no deseada al inicio, pero que ahora nos parece oportuna.

Existen además dos variables que fueron estudiadas aunque no en profundidad y que deseamos evidenciar dada su relevancia.

7.3. Variable primera: la presencia de una figura ilustrativa dentro del apartado T que se está usando como test en la prueba.
En algunos apartados aparecía, como parte del mismo o como ilustración del escrito, una figura, un dibujo, esto cuando el contenido del apartado era de carácter geométrico. Como sucede siempre en estos casos, el dibujo ilustra, en el registro semiótico figural (o, más en general, en un registro no discursivo), lo que el texto dice en lengua común (en su versión con carácter matemático). Ahora bien, casi siempre los docentes creen sin duda que el doble registro ayuda en la comprensión textual del estudiante, aunque en varias ocasiones, por ejemplo en los trabajos citados a continuación, se evidencia que no es necesariamente así. La llamada "visualización" a veces complica la comprensión, como lo evidencian algunos artículos de investigación [D'Amore (1995), Bagni (1997, 1998), véase también D'Amore y otros (1999)].
Para decirlo con otras palabras, algún docente, en especial de primaria y de los primeros años de secundaria, pensaba antes de la prueba que la presencia de la figura ilustrativa en un texto T habría mejorado netamente el valor de r_{TS}; por el contrario, se constató que este hecho no sucedió.

Consideramos que sobre este punto se deba aún hacer investigación, incluso tomando como base temas específicos relacionados con la semiótica que en esta ocasión no tratamos explícitamente (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013).

7.4. Variable segunda: la presencia de un título en el apartado T dado en la prueba.
Algunos escritos que fueron consignados a los estudiantes iniciaban con un título; se trataba en ocasiones de apartados en los cuales se daban las primeras explicaciones sobre un argumento matemático, retomando el título, precisamente. Por ejemplo, en uno de los textos tenía como título: Media aritmética. El texto recitaba así:
«Media aritmética
En estadística, se llama media aritmética el número que se obtiene…».
Cancelando las palabras que ocupaban un puesto múltiplo de 5, pero dejando intacto el título se obtiene:
«Media aritmética
En estadística, se llama ---- aritmética el número que ---- obtiene…».
Ingenuamente podríamos pensar que la primera palabra suprimida (media) sea fácilmente individuada a partir del título; por el contrario, fue mínimo el número de estudiantes que eligieron escribir la palabra "media" en primer espacio. Muchos alumnos lo dejaron en blanco, otros escribieron: suma, expresión, calculo (evidenciando además un error de congruencia: "cálculo" es masculino, no coincide en género con "aritmética" que es femenino) y otras.
Esto nos lleva a re-considerar totalmente el sentido que se le da a la lectura del apartado por parte del estudiante que lee; tal vez la estructura editorial del objeto escrito T, que es obvia para el docente - adulto, de hecho no lo es para todos los estudiantes; el título ilustra el contenido para el adulto, mientras que no implica información alguna para algunos estudiantes (en particular para los más jóvenes).

8. Leer y escribir de matemática; el aprendizaje comunicativo en matemática.

La clásica dicotomía lectura / escritura nos lleva a recordar que, en la praxis escolar matemática más o menos difundida en el mundo entero, se lee matemática (poco y mal, y en ocasiones sin comprender) pero casi nunca se escribe matemática, a menos que se trate de enunciados de problemas o de definiciones, o de reglas bajo dictado; mientras que se demostró en varias investigaciones que una de las formas que proporciona mejores resultados para apropiarse de los conceptos es la de escribir explícitamente sobre estos, y la matemática no es una excepción (D'Amore, Maier, 2002). Una de la técnica que ha dado buenos resultados es la de los TEP.
«(…) TEP [literalmente: producción textual autónomas de los estudiantes] es decir escritos elaborados de forma autónoma por los estudiantes teniendo como sujeto cuestiones matemáticas. Estas no deben coincidir con otras producciones escritas producidas no autónomamente (tareas, apuntes, descripciones de procedimientos etc.). Las producciones de estos últimos ejemplos no son autónomas, están regidas por vínculos más o menos explícitos, y por general son objeto de evaluación directa o indirecta. (…) Decimos que se consideran TEP aquellas producciones en las cuales el estudiante, puesto en la condición de *desear* expresar de forma comprensible y con lenguaje personal, acepta liberarse de condicionamientos lingüísticos y hace uso de expresiones espontáneas.
Ejemplos de TEP son por tanto:
protocolos comentados de problem solving (…);
informes lo más posible espontáneos de investigaciones de tipo matemático (tentativos, medidas, resultados, procedimientos, …);
descripciones detalladas y explicaciones de conceptos o de algoritmos matemáticos;
textos introductorios de una situación específica que requiere la comunicación de hechos y de relaciones matemáticas de forma escrita;
textos que definen conceptos matemáticos, que formulan hipótesis, argumentaciones o pruebas en relación con un teorema o con una situación matemática;
(…)» (D'Amore, Maier, 2002, pág. 145).
Entre las funciones didácticas de los TEP, que interesan a nuestra investigación, se evidencian las siguientes:

«(…) La producción de TEP estimula al estudiante a analizar y a reflexionar sobre los conceptos matemáticos, las relaciones, las operaciones y los procedimientos, investigaciones y procesos de problem solving con los cuales tienen que ver. Así cada alumno puede alcanzar una mayor conciencia y una mayor comprensión matemática de estos.
Los TEP pueden mejorar las competencias de los estudiantes en el uso del lenguaje específico, dado que les dejamos el tiempo para una atenta y reflexiva elección de los significados lingüísticos, no como sucede, por el contrario, en ocasiones, durante una discusión o durante una prueba oral, con una evolución dialógica demasiado rápida y caracterizada por una relación pre-establecida; el TEP impulsa al estudiante a un uso activo de los términos técnicos y de los símbolos (Maier, 1989a, 1989b, 1993; Maier, Schweiger, 1999).
Los TEP dan al estudiante la oportunidad de tener continuamente bajo control la propia comprensión de cuestiones matemáticas, gracias a una razonada y reflexiva confrontación con el docente y los compañeros de clase.
Los TEP permiten al docente de evaluar de forma efectiva el conocimiento construido personalmente y la comprensión de ideas matemáticas, de forma mucho más detallada y profunda de cuanto sea posible sobre la base de los comunes textos escritos, normalmente realizados como protocolos de actividades de problem solving no comentados. (…)» (D'Amore, Maier, 2002, pág. 146).

Sobre la base de lo evidenciado en el apartado 7. y en la primera parte del apartado 8., nos agrada patentizar que este tipo de estudio se incluye, en lo que nosotros llamamos "aprendizaje comunicativo de la matemática" (Fandiño Pinilla, 2008).
No es que hayamos decidido hacer una explícita y enfática llamada a la problemática del "escribir de matemática" y a los TEP. Consignar al estudiante una prueba de clausura (o cerradura) relativa a un texto de matemática significa pretender una comunicación no del todo completa y explícita entre él y el autor del escrito; comunicación que el alumno debe reintegrar / reinventar / reconstruir/ recrear, es decir volver a hacer explícita sobre la base de las supuestas intenciones del autor que él interpreta (o de las intenciones del docente que enseñó el mismo contenido matemático, sin excluir las eventuales lecturas de los textos de otros autores sobre el mismo tema). El estudiante está completando una comunicación matemática explícita parcial haciéndola, desde su punto de vista, total o completa. En esta actividad comunicativa, él pone en juego su propia comprensión, su interpretación, su propia experiencia lingüística. No es como escribir un TEP, donde se sugiere un tema del cual tratar y un sujeto que lo escribe; es diferente: aquí debe aceptar el lenguaje de comunicación de otro para sí, de un autor, o docente, y el tema que éste está poniendo en juego.
Pero siempre de comunicación se trata.
Si comunicar en latín es *cum-munire* (es decir: leer o construir con), se forma aquí un proceso de comunicación de gran interés entre el autor de un texto (elegido preliminarmente, por lo general por un experto), un estudiante (aprendiz) que interviene para "cerrar" el texto interpretándolo, un adulto (docente, también él experto) quien debe decidir si dicha tarea fue realizada correctamente. Se tiene un intercambio de información entre el autor, el docente y el estudiante; el estudiante se basa sobre su propia comprensión y sobre su cultura personal para interpretar las informaciones incompletas; pero el estudiante comunica sólo implícitamente con el autor porqué sabe que deberá someter su trabajo a la evaluación del docente y, por tanto, de hecho, comunica principalmente con él; el docente, al expresar el juicio sobre la elección de las palabras que cierran el escrito incompleto, comunica con el estudiante, cerrando el ciclo.

9. Conclusiones.

Las investigaciones empíricas son fascinantes porque nunca pueden declararse concluidas; en el sentido que, cambiando la muestra, cambian algunas variables; repitiendo las pruebas, se pueden encontrar resultados que permiten mejorar los resultados obtenidos; etcétera.
Por ejemplo, ¿qué sucede si el escrito T, dado como lectura, es discutido antes en el aula? ¿Qué sucede si se da como tarea para realizar en casa la lectura del apartado, avisando que será objeto de prueba el día siguiente? ¿Y si en lugar de considerar un texto escrito por un autor adulto se analizará el texto de un compañero (D'Amore et al., 1995)?
Las pruebas de legibilidad, detenidas en 1995, encontraron, en nuestra experiencia, una nueva vitalidad, pero también el peso de la crítica moderna: que dichas fórmulas no pueden ser consideradas como un absoluto, sino relativas (basta pensar por ejemplo en el asignar valores

diversos a los factores multiplicativos; o cambiar el número 5: cancelar las palabras que ocupan en el texto múltiplos de 4 o de 6). Por tanto, esperamos que investigaciones futuras en este sector tengan un amplio espacio de análisis y discusión.

Las elecciones que hemos hecho nos condujeron a pensar que, sobre la base de nuestras experiencias y pruebas, la nuestra es aún una fórmula de comprensión de tipo clásico (no sólo de legibilidad), en la dirección de las primeras investigaciones realizadas entre los ’50 y ’60; pero que podría abrir otros frentes novedosos.

Pero somos también conscientes que el docente pueda usar nuestra fórmula:

a) para evaluar lo más objetivamente posible la dificultad de comprensión de un texto de matemática; por ejemplo haciendo la prueba sobre los alumnos de su clase para verificar cual es la media del éxito alcanzado;
b) una vez verificado que un determinado escrito es comprensible para la mayor parte de los alumnos de su clase, encontrar la forma de incrementar la comprensión por parte de aquellos alumnos que han obtenido un índice de comprensión superior a la media.

De esta forma, de hecho, estamos frente a índices objetivos y no sólo frente a intuiciones. Cuando la evaluación es lo más objetiva posible, la ayuda que se puede dar a quien tiene dificultad es más fácil, se trata sólo de entender *las causas* que han llevado al fracaso.

Por último, debemos decir que, aun no siendo en las intenciones de los autores, esta investigación evidenció una laguna de carácter didáctico, una perturbación necesaria de la praxis de enseñanza-aprendizaje: es necesario dar la posibilidad a los estudiantes de leer por sí solos apartados de matemática, evitar que sean siempre y constantemente los docentes quienes los interpretan. El estudiante tiene necesidad de este tipo de actividad, tiene necesidad de equivocarse y de corregirse, de reflexionar sobre los escritos, incluso con vista a las pruebas que deberá por fuerza afrontar por sí mismo.

Por esto esperamos haber contribuido a una reflexión profesional sobre un aspecto específico del aprendizaje de la matemática sin tener en cuenta el nivel escolar.

Agradecimientos

Esta investigación, que nos ocupo más de dos años intensos, no habría podido tener lugar sin la apasionada y crítica contribución de todos los investigadores mencionados al inicio, docentes italianos miembro de RSDDM de Bologna, además de las dos docente colombianas durante el curso de maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín. Todos contribuyeron en forma mucho más significativa de cuanto se les había pedido, en el sentido que no se limitaron a proponer las pruebas en aula a sus estudiantes sino que comentaron los resultados obtenidos, en algunos casos rehicieron las pruebas con otros criterios o bajo otras reglas, usando variables que poco a poco venían empíricamente propuestas y sometidas a prueba. A todos un sincero agradecimiento. Uno especial va a quien coordinó el trabajo de los docentes – investigadores: Erminia Dal Corso y Annarita Monaco (para la escuela primaria) y Maura Iori (para la escuela secundaria).

Un agradecimiento muy especial para el colega y amigo Vicenç Font por su lectura crítica y constructiva a una versión precedente de este trabajo, lectura que nos permitió mejorar la exposición de los contenidos.

Referencias bibliográficas

Bagni, G. T. (1996). *Corso di matematica 3*. Bologna: Zanichelli.

Bagni, G. T. (1997). La visualizzazione nella scuola secondaria superiore. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *20B*(4), 309–335.

Bagni, G. T. (1998). Visualization and didactics of mathematics in High School: an experimental research. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *XXXV*(1), 161–180.

D’Amore, B. (1981). *Il libro di matematica 3*. Bologna: Cappelli.

D’Amore, B. (1987). Matematica e lingua: reciproche influenze. *Riforma della scuola*, 12, 25-32.

D’Amore, B. (1993a). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving*. Milán, Angeli. II edición italiana. 1996. [Ed. en idioma español: Madrid: Síntesis, 1996].

D'Amore, B. (1993b). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289-301. [Este artículo fue publicado en idioma alemán: *Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme*, en: A. Gagatsis, H. Maier (Eds.) (1995). *Texte zur Didaktik der Mathematik*. Erasmus. Thessaloniki-Regensburg. 105-125. Aún en idioma alemán, con el mismo título, en: *Journal für Mathematik Didaktik*, *17*(2), 81-97].

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328-370.

D'Amore, B. (1996). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino*, 32, 57-64.

D'Amore, B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. En: B. Jannamorelli, A. Strizzi (Eds.) (1997). *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*. Actas del 3° Seminario Internacional de Didáctica de la Matemática, Sulmona, abril 1997. Torre dei Nolfi (Aq): Qualevita. 57-68.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edición en idioma español: (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio. Edición en idioma portugués: (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Con prefacios de Ubiratán D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau].

D'Amore, B. (Ed.) (1999). *Continuità e scuola*. Progetto per un percorso formativo unitario dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Vol. 3: *La Matematica*. Quaderni di Documentazione dell'Istituto Pedagogico di Bolzano, n. 6. Milano-Bolzano: Junior.

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 28-47.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefacio de Gérard Vergnaud y de Silvia Sbaragli. Módena: Digital Index. [Versión en papel y versión e-book].

D'Amore, B. et al. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(2), 131-146. [Este artículo fue republicado en idioma inglés en: A. Gagatsis, L. Rogers (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 954 G 2011/11. Tesalónico53-72].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendinento della matematica*. Prefacio de Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. [Edición en idioma español: (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio]. [Edición en idioma portugués: (2015). *Primeiros elementos de semiótica. Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prólogos de Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Eduardo Vasco Uribe y Ubiratan D'Ambrosio. Traducción de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física].

D'Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, *16*(2), 144-189.

D'Amore, B., & Martini, B. (1998). Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *21A*(3), 209-234. [Este artículo fue republicado en idioma español: *Suma*, 30, 1999, 77-87].

D'Amore, B., & Sandri, P. (1994), Everyday language and "external" models in an a-didactic situation. En: N. Malara & L. Rico (Eds.) (1994). [Republicado en: A. Gagatsis (Ed.) (1994), (en griego) 253-262, (en francés) 585-594].

D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(3), 223-246. [Este artículo fue republicado en idioma español en: *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática* (Bogotá, Colombia), *4*(3), 1999, 207-231].

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefacio de Giorgio Bolondi. Trento: Erickson. [Versión en idioma español: (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio].

Flesh, R. (1951). *How to Test Readability*. New. York: Harper and Row.

Gagatsis, A. (1980). *La transmission de l'Information et son application a deux manuels scolaires*. Strasbourg IREM: Université Louis Pasteur.

Gagatsis, A. (1982). *Discrimination des scores au test de clôture et évaluation de la compréhension des textes mathématique*. Strasbourg, novembre 1982 (Thèse de 3^e^ cycle).

Gagatsis, A. (1984). Préalables a une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *5*(1), 43-80.
Gagatsis, A. (1985). Questionnes soulevées par le test de clôture. *Revue Française de Pédagogie*. 70, 41-50.
Gagatsis, A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 136-146.
Gagatsis, A., & Chaney, E. (1983). Le test de clôture en classe. *L'ouvert*. 32, 21-33.
Henry, G. (1973). *Construction de trois formules de lisibilité spécifiques à la langue francaise.* Thèse de doctorat, Università di Liège.
Laborde, C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseigement mathématique*. Thèse d'État, Univ. J. Fourier, Grenoble.
Laborde, C. (1990), Language and Mathematics. En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.) (1990). *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
Laborde, C. (1995), Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121-135.
Kandel, L., & Moles, A. (1958). Application de l'indice de Flesh à la langue française. *Cahiers d'étude de la Radio-Télévision*. 19.
Kane, R., Byrne, M., & Hater, M. (1974). *Helping children read mathematics*. New York: American Book Company.
Maier, H. (1989a). Problems of language and communication. En E. Pehkonen (Ed.) (1989). *Geometry – geometrieunterricht*. Helsinki: University. 23–36.
Maier, H. (1989b). Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les elèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86–118.
Maier, H. (1993). Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(2), 175–191.
Maier, H. (1996), Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superale. En B. D'Amore (Ed.) (1996a), *Convegno del decennale*. Actas del homónimo Congreso Nacionale, Castel San Pietro Terme. Bologna, Pitagora. 27-48.
Maier, H., & Schweiger F. (1999). *Mathematik und sprache. Zum verstehen und verwenden von fachsprache im mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Piechler-Tempsky.
Paciotti, R.,Volpati, M., & Meloni L. (1978). *Evviva*. III classe. Novara: De Agostini. 184-185.
Rankin, E. F. (1970). The Cloze Procedure, its validity and utility. En R. Farr (Ed.) (1970). *Measurement and Évaluation of Readìng*. New York: Harcourt, Brace and World. 237-253.
Vogel, M., & Washburne, C. (1928). An objective method of determining grade placement of children's reading material. *Elementary school journal*. 28, 373-381.
Taylor, W. L. (1953). Cloze Procedure: a New Tool far measuring Readability. *Journalism Quarterly*. 30, 415-433.